

安徽大学 2022—2023 学年第二学期
《 高等代数（下） 》期中考试试卷
标准答案与评分细则

一、填空题（每空 5 分，共 25 分）

1. $(f(x), f'(x)) \neq 1$; 2. -2 ; 3. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (原答案有错!);
4. $m(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)$; **43** (原答案有错!).

二、简答题（每题 5 分，共 15 分）

5. 最重要的定理是带余除法，因为它贯穿着整个多项式一章，可以用来求最大公因式，综合除法，因式分解等。(注：提到带余除法给 3 分)
6. 如果某个特征子空间 V_{λ_i} 的维数小于特征值 λ_i 的代数重数，则把该特征子空间 V_{λ_i} 扩展为根子空间，然后在所有的根子空间里取一个基，合并起来凑成 V 的一个基，则在该基下的矩阵就是 Jordan 标准形。(注：提到根子空间给 3 分)
7. 充要条件有
- (1) 有 n 个线性无关的特征向量;
 - (2) 线性空间可以分解为所有特征子空间的直和;
 - (3) 每个特征值的代数重数等于几何重数;
 - (4) 极小多项式是所有特征根的一次因式乘积。
- 充分条件是：(5) 线性变换 φ 有 n 个不同的特征值。

三、计算题（每题 10 分，对没标出步骤分的题，请判卷者按自己判定给分）

8.

解. 对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 施行辗转相除法，其计算过程可写成如下格式

$q_2(x) =$	$g(x)$	$f(x)$	$q_1(x) = 2x$
$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$	$2x^3 - x^2 - 5x + 4$ $2x^3 + x^2 - 3x$	$4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$ $4x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 8x$	
	$-2x^2 - 2x + 4$ $-2x^2 - x + 3$	$r_1(x) = -6x^2 - 3x + 9$ $-6x^2 + 6x$	$q_3(x) =$
	$r_2(x) = -x + 1$	$-9x + 9$ $-9x + 9$	$6x + 9$
		0	

于是 $r_2(x) = -x + 1$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，且 $(f(x), g(x)) = x - 1$. 而

$$f(x) = 2xg(x) + (-6x^2 - 3x + 9),$$

$$g(x) = (-6x^2 - 3x + 9)q_2(x) + r_2(x).$$

所以

$$\begin{aligned}
 r_2(x) &= g(x) - (-6x^2 - 3x + 9)q_2(x) \\
 &= g(x) - (f(x) - 2xg(x))q_2(x) \\
 &= \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)f(x) + \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1\right)g(x).
 \end{aligned}$$

取 $u(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, $v(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$, 则

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

9. （原答案有错！）解对矩阵做初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

易见矩阵的前 3 列线性无关，所以 φ 的值域为

$$\text{Im } \varphi = L(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2\varepsilon_4, 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 - \varepsilon_4, 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 5\varepsilon_3 + \varepsilon_4)$$

\dots\dots\dots 6 分

φ 的核为 $AX=0$ 的解空间。由 $AX=0$ 得基础解系为 $X_1=(5,0,-4,3)^T$ ，故
 $\text{Ker}\varphi=L(5\varepsilon_1-4\varepsilon_3+3\varepsilon_4)$ 。10 分

10. 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3$$

特征值为： $\lambda=2$ （三重）。3 分

对应的特征向量有 1 个： $\alpha_1=(-1,1,0)^T, \alpha_2=(0,0,1)^T$ 。故几何重数为 2，代数重数 3，

所以可得 A 的 *Jordan* 标准形 $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 。5 分

由上知 A 的初等因子组为 $(\lambda-2), (\lambda-2)^2$ ，故 $\lambda I - A$ 的 Smith 标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}。10 分$$

11.（每一问 5 分，共 10 分）

(1) 由 $A\alpha = \lambda\alpha$ ，即

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{得} \quad \begin{cases} 2-1-2=\lambda \\ 5+a-3=\lambda \\ -1+b+2=-\lambda \end{cases}$$

解得 $a=-3, b=0, \lambda=-1$ 。

$$(2) \text{ 由于 } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$-(\lambda+1)^3$ ，所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 。可求得 $\text{rank}(A+E) = 2$ ，从而 A 对应三重特征值 -1 只有一个线性无关的特征向量，故 A 不可对角化。

四、证明题（每题 10 分，对没标出步骤分的题，请判卷者按自己判定给分）
12.

证明. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 分别为 V 和 W 的基, φ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 和基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 下的矩阵为 A , 即

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)A.$$

设 $\text{rank} A = r$, 则存在 m 阶与 n 阶可逆方阵 P 与 Q , 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

令

$$(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)Q,$$

$$(\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_m) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)P^{-1}.$$

由于 P, Q 可逆, 所以 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n$ 与 $\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_m$ 分别是 V 与 W 的基. 由定理 4.1.4 知, φ 在基 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n$ 与基 $\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_m$ 下的矩阵即为

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

13.

证明. 设线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征值 λ_0 的几何重数为 m_0 , 即 $\dim V_{\lambda_0} = m_0$. 取 V_{λ_0} 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_0}$, 将其扩充成 V 的一个基

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_0}, \alpha_{m_0+1}, \dots, \alpha_n.$$

由于 $\alpha_i \in V_{\lambda_0}$, 则 $A(\alpha_i) = \lambda_0 \alpha_i, i = 1, 2, \dots, m_0$. 于是线性变换 $\mathcal{A}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_0}, \alpha_{m_0+1}, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵 A 为准上三角形, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{11} = \lambda_0 I_{m_0}$. 因此, A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m_0} \det(\lambda I_{n-m_0} - A_{22}).$$

由于线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征多项式与方阵 A 的特征多项式相同, 因此特征值 λ_0 的几何重数不超过 λ_0 的代数重数. $\square$